Operatory w przestrzeniach L_p
Lista 3 (warunkowe wartości oczekiwane)

Zad 1. Niech X będzie zmienną losową na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ obliczyć $E(X|\Omega)$ i $E(1_A|B)$ gdzie 1_A jest funkcją charakterysyczną zbioru A; A, $B \in \mathcal{F}$ i $P(B) > 0$.

Zad 2. Wyznaczyć warunkową wartość oczekiwaną $E(X|\mathcal{G})$ pod warunkiem σ-ciała $\mathcal{G}$ gdzie

$$a)\ \mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}, \qquad b)\ \mathcal{G} = 2^{\Omega}, \qquad c)\ \mathcal{G} = \{\emptyset, A, A', \Omega\} \text{ dla pewnego } A \in \mathcal{F}.$$

Zad 3. Wyznaczyć wartość oczekiwaną $E(X|Y)$ podwarunkiem deterministycznej zmiennej Y, tj. $Y = const.$

Zad 4. Wyznaczyć wartość oczekiwaną $E(1_A|1_B)$, gdzie $P(B) \neq 0, 1$.

Zad 5. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich i P jest miarą Lebesgue'a na $[0,1]$, oraz zmienne losowe

$$X(x) = 2x^2, \qquad Y(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{3}], \\ 2, & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ 0, & x \in (\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Wyznaczyć warunkową wartość oczekiwaną $E(X|Y)$. Narysować wykresy X, Y, $E(X|Y)$.

Zad 6. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, przy czym niech Y będzie dyskretna przyjmująca z niezerowym prawdopodobieństwem wartości $\{y_1, y_2, ...\}$. Pokazać, że prawie na pewno

$$E(X|Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{P(Y = y_i)} \int_{\{Y=y_i\}} X dP.$$

Zad 7. Dla zmiennej losowej $X(x) = 2x^2$ na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich i P jest miarą Lebesgue'a na $[0,1]$, wyznaczyć $E(X|Y)$ i narysować wykresy X, Y, $E(X|Y)$, gdy

$$\text{a) } Y(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ x, & x \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \qquad \text{b) } Y(x) = 1 - |2x - 1|, \qquad \text{c) } Y(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ 2x - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Zad 8. Niech X i Y zmienne losowe. Udowodnić, że zmienna X jest $\sigma(Y)$ mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja borelowska $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $X = h(Y)$.

Zad 9. W zadaniach 4, 8 wyznaczyć funkcje borelowskie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że $E(X|Y) = h(Y)$. Przedyskutować wartości warunkowej wartości oczekiwanej $E(X|Y = y)$ dla $y = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$.

Zad 10. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich, a P jest miarą probabilistyczną na $[0,1] \times [0,1]$ daną wzorem

$$P(A) = \int_A x + y \; dx\, dy.$$

Wykazać, że $E(X|Y) \overset{p.n.}{=} \frac{2+3Y}{3+6Y}$ dla zmiennych losowych $X(x,y) = x$ i $Y(x,y) = y$.

Zad 11. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1] \times [0,1])$ a P jest miarą probabilistyczną na $[0,1] \times [0,1]$ daną wzorem

$$P(A) = \int_A \frac{3}{2}(x^2 + y^2) \; dx\, dy.$$

Obliczyć, $E(X|Y)$ dla zmiennych losowych $X(x,y) = x$ i $Y(x,y) = y$.

Zad 12. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ i P miara Lebesgue'a podzielona przez π. Obliczyć, $E(X^2|Y)$ gdzie $X(x,y) = x$ i $Y(x,y) = y$.